eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Matemáticas II

EAU 2021

www.ehu.eus

Azterketa honek BOST atal ditu, bakoitza 2,5 puntukoa. Horietako LAUri erantzun behar diezu. Atal bakoitzeko galdera bati erantzun soilik.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:

- pantailla grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera,
- ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera,
- determinanteen kalkulua egiteko aukera,
- deribatuak eta integralak egiteko aukera,
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

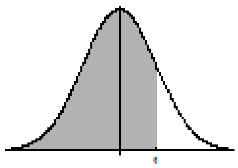
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2021eko EZOHIKOA

EXTRAORDINARIA 2021

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discutir el sistema de ecuaciones lineales que sigue, en función del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x + 2y - z = \alpha, \\ 2x + \alpha y + z = 2 + \alpha, \\ x - \alpha y + 2z = 2\alpha. \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = 1$, si es posible.

Ejercicio B1

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular la matriz X de orden 2×2 que verifica

$$A^2 \cdot X + B = C.$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sea r la recta de ecuaciones paramétricas

$$\{x = t,\ y = 2 + 2t,\ z = 1 + 3t\},$$

y sean $A = (1, 2, 3)$ y $B = (3, 2, 1)$. Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r y que pasa por los puntos A y B. Calcular la distancia de la recta r a ese plano.

Ejercicio B2

Sean los puntos $A = (0, 2, 1)$, $B = (1, b, 0)$, $C = (-1, 0, 2)$ y $D = (1, 1, 1)$.

a) Calcular el valor de b para que A, B, C y D estén en el mismo plano.

b) El plano que contiene a los puntos A, B, C y D es perpendicular al segmento PQ y lo divide en dos partes iguales. Si $P = (1, 2, -3)$, calcular las coordenadas de Q.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-4}$ y calcular sus máximos y sus mínimos.

Ejercicio B3

Sea $f(x) = x^4 + Ax^2 + Bx + C$. Obtener los valores de A, B y C para que en el punto de abscisa $x = 0$ la recta tangente a la gráfica de f sea $y = 2x - 1$ y en el punto de abscisa $x = 1$ la recta tangente a la gráfica de f sea horizontal. El extremo situado en el punto de abscisa $x = 1$, ¿es máximo o mínimo?

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Dibujar el recinto limitado por las parábolas $y = 4x - x^2$ e $y = x^2 - 6$ y calcular su área.

Ejercicio B4

Calcular $\int x \ln(x+1)\, dx$, explicando el método utilizado.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

De los 700 estudiantes que tiene un centro escolar se sabe que 500 proceden del barrio donde está ubicado el centro, 575 utilizan el servicio de comedor y 400 son del barrio y utilizan el servicio de comedor. Se escoge un estudiante al azar.

a) Si es del barrio, ¿cuál es la probabilidad de que use el servicio de comedor?

b) Si usa el servicio de comedor, ¿cuál es la probabilidad de que no proceda del barrio?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea del barrio o use el servicio de comedor?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea del barrio ni utilice el servicio de comedor?

Ejercicio B5

La estatura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 1,74 cm y desviación típica 0,05 cm. Se elige un individuo al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga una estatura igual o inferior a la media?

b) ¿Cuál es la probabilidad que su estatura esté comprendida entre 1,64 y 1,84 cm?

c) Si la población está compuesta por 1500 individuos, ¿Cuántos tienen una estatura inferior a 1,54 cm?

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta $2,5$ puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc, siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.
7. Caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

Criterios particulares de cada uno de los problemas

A.1.

- Cálculo del determinante de la matriz y discusión para los casos en los que no se anula el determinante (1 punto).
- Discusión para los casos de $\alpha = -2$ y $\alpha = 1$ (0,75 puntos).
- Resolución para el caso $\alpha = 1$ (0,75 puntos).

B.1.

- Planteamiento del problema y cálculo de la matriz inversa de A^2 (1,25 puntos)
- Cálculo correcto de la matriz X (1,25 puntos).

A.2.

- Obtención de la ecuación del plano (1,5 puntos).
- Cálculo correcto de la distancia del plano a la recta (1 punto).

B.2.

- Cálculo correcto del parámetro b (1,25 puntos).
- Cálculo correcto de las coordenadas del punto Q (1,25 puntos).

A.3.

- Cálculo correcto de la primera derivada de f (0,5 puntos)
- Cálculo correcto de los intervalos de crecimiento y decreciemiento (1 punto).
- Cálculo correcto del máximo (0,5 puntos).
- Cálculo correcto del mínimo (0,5 puntos).

B.3.

- Planteamiento de todas las condiciones y cálculo correcto de los valores de A, B y C (2 puntos).
- Resolución correcta de la pregunta formulada (0,5 puntos).

A.4.

- Dibujo adecuado del recinto y cálculo de los puntos de corte de ambas parábolas (1,25 puntos).
- Cálculo correcto del área del recinto mediante la regla de Barrow (1,25 puntos).

B.4.

- Explicar en qué consiste el método de integración por partes (0,5 puntos).
- Cálculo correcto de la integral utilizando el método anterior. (2 puntos).

A.5.

- Resolución correcta del apartado a) (0,5 puntos).
- Resolución correcta del apartado b) (0,5 puntos).
- Resolución correcta del apartado c) (1 punto).
- Resolución correcta del apartado d) (0,5 puntos).

B.5.

- Resolución correcta del apartado a) (0,5 puntos).
- Resolución correcta del apartado b) (1 punto).
- Resolución correcta del apartado c) (1 punto).

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

SOLUCIÓN A1

El determinante del sistema es $3(\alpha+2)(\alpha-1)$, por lo tanto, para $\alpha \neq -2$ y $\alpha \neq 1$ el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO

Para $\alpha = -2$ el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada es 3, por lo que el sistema es INCOMPATIBLE.

Para $\alpha = 1$ el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada es también 2, por lo que el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

La solución, para $\alpha = 1$, es $\left(x, \dfrac{4}{3} - x, \dfrac{5}{3} - x\right)$.

SOLUCIÓN B1

Despejando la matriz X tenemos que $X = (A^2)^{-1} \cdot (C - B)$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C - B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, se sustituyen en la expresión de arriba, para obtener $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN A2

El vector normal al plano es perpendicular al vector director de la recta r, $\vec{v} = (1,2,3)$ y también es perpendicular al vector definido por los puntos A y B, $\overrightarrow{AB} = (2,0,-2)$. Por lo tanto, el vector normal al plano es $(1,2,3) \times (2,0,-2) = (-4,8,-4)$, y, conocido un punto del mismo, $(1,2,3)$, la ecuación del plano pedido es $x - 2y + z = 0$.

La distancia de la recta al plano es la distancia de cualquiera de los puntos de la recta al plano. La distancia del punto $(0,2,1)$ de la recta al plano $x - 2y + z = 0$ es $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ u.

SOLUCIÓN B2

a) El vector normal al plano que contiene a los puntos A, B y D es $(-1,2,1)\times(1,-1,0)=(1,1,3)$, por lo que la ecuación del plano que contiene a esos puntos será $x+y+3z-5=0$. Para que B esté también en ese mismo plano, se sustituyen sus coordenadas, $(1,b,0)$ en la ecuación del plano y se obtiene $b=4$,

b) Se calcula la recta pependicular al plano anterior y que pasa por el punto $P=(1,2,-3)$. El vector director de la recta es el vector normal al plano, esto es, $(1,1,3)$, luego las ecuaciones paramétricas de la recta buscada son $x=1+t$, $y=2+t$, $z=-3+3t$.

   Posteriormente, se calcula el punto de intersección del plano con esta recta, siendo este el $P_0=(2,3,0)$ Finalmente, se calcula el punto simétrico, $Q=(3,4,3)$.

SOLUCIÓN A3

Dada la función $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-4}$, su derivada es $f'(x)=-\dfrac{x^2-8x+4}{(x^2-4)^2}$, que se anula en $x=4+2\sqrt{3}$ y $x=4-2\sqrt{3}$. La función es creciente en los intervalos $(4-2\sqrt{3},2)$ y $(2,4+2\sqrt{3})$, y es decreciente en los intervalos $(-\infty,-2)$, $(-2,4-2\sqrt{3})$ y $(4+2\sqrt{3},\infty)$.

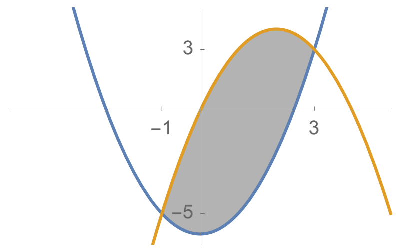
La función tiene un máximo en $x=4+2\sqrt{3}$ y un mínimo en $x=4-2\sqrt{3}$.

SOLUCIÓN B3

De las condiciones impuestas, resulta que $A=-3$, $B=2$ y $C=-1$, es decir, la función es $f(x)=x^4-3x^2+2x-1$ y su derivada es $f'(x)=4x^3-6x+2$, que se anula en $x=1$, $x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ y $x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$. La segunda derivada de la función es $f''(x)=12x^2-6$. $f''(1)=6>0$, por lo tanto, la función tiene un mínimo en $x=1$.

SOLUCIÓN A4

Las parábolas se cortan en los puntos $(-1, -5)$ y $(3, 3)$. El recinto pedido es



El área del recinto se calcula mediante la siguiente integral definida:

$$\int_{-1}^{3} (4x - x^2 - x^2 + 6)dx = \frac{64}{3} u^2.$$

SOLUCIÓN B4

La integral se puede resolver por partes: $\int u dv = uv - \int v du$, donde $u = \ln(x+1)$ y $dv = xdx$. Así, resulta que $du = \dfrac{dx}{x+1}$ y $v = \dfrac{x^2}{2}$. Por lo tanto,

$$\int x \ln(x+1)\, dx = \frac{x^2 - 1}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C.$$

SOLUCIÓN A5

Sean los sucesos: B: ser del barrio, B': no ser del barrio, C: usar el servicio de comedor, C': no usar el servicio de comedor.

a) $P(C/B) = \dfrac{400}{500} = 0,8.$

b) $P(B'/C) = \dfrac{175}{575} = 0,3.$

c) $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \dfrac{500}{700} + \dfrac{575}{700} - \dfrac{400}{700} = \dfrac{675}{700} \simeq 0,96.$

d) $P(B' \cap C') = \dfrac{25}{700} \simeq 0,04.$

SOLUCIÓN B5

a) $P(x < 1,74) = 0,5.$

b) $P(1,64 < x < 1,84) = P\Big(\dfrac{1,64 - 1,74}{0,05} < z < \dfrac{1,84 - 1,74}{0,05}\Big)$

$$= P(-2 < z < 2) = 0,9772 - (1 - 0,9772) = 0,9544.$$

c) $P(x < 1,54) = P\Big(z < \dfrac{1,54 - 1,74}{0,05}\Big) = P(z < -4) = 0$, por tanto, ningún individuo tiene una estatura inferior a 1,54.